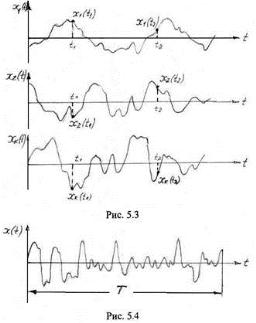
Математическими моделями случайных сигналов и помех являются случайные процессы. Случайным процессом (СП) называется изменение случайной величины во времени. К случайным процессам относится большинство процессов, протекающих в радиотехнических устройствах, а также помехи, сопровождающие передачу сигналов по каналам связи. Случайные процессы могут быть непрерывными (НСП), либо дискретными (ДСП) в зависимости от того, какая случайная величина непрерывная или дискретная изменятся во времени. В дальнейшем основное внимание будет уделено НСП.

[](http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image701.jpg) Прежде чем приступить к изучению случайных процессов необходимо определится со способами их представления. Будем обозначать случайный процесс через http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image702.gif, а его конкретную реализацию – через http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image703.gif. Случайный процесс может быть представлен либо совокупностью (ансамблем) реализаций, либо одной, но достаточно протяженной во времени реализацией. Если сфотографировать несколько осциллограмм случайного процесса и фотографии расположить одну под другой, то совокупность этих фотографий будет представлять ансамбль реализаций (рис. 5.3).

Здесь http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image704.gif – первая, вторая, …, k-ая реализации процесса. Если же отобразить изменение случайной величины на ленте самописца на достаточно большом интервале времени T, то процесс будет представлен единственной реализацией (рис. 5.3).

Как и случайные величины, случайные процессы описываются законами распределения и вероятностными (числовыми) характеристиками. Вероятностные характеристики могут быть получены как усреднение значений случайного процесса по ансамблю реализаций, так и усреднением по одной реализации.

Пусть случайный процесс представлен ансамблем реализаций (рис. 5.3). Если выбрать произвольный момент времени http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image705.gif и зафиксировать значения, принимаемые реализациями http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image706.gif в этот момент времени, то совокупность этих значений образует одномерное сечение СП

и представляет собой случайную величину http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image707.gif. Как уже подчеркивалось выше, исчерпывающей характеристикой случайной величины http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image707.gif является функция распределения http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image708.gif или одномерная плотность вероятности

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image709.gif.

Естественно как http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image710.gif, так и http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image711.gif, обладают всеми свойствами функции распределения и плотности распределения вероятности, рассмотренными выше.

Числовые характеристики в сечении http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image705.gif определяются в соответствии с выражениями (5.20), (5.22), (5.24) и (5.26). Так, в частности математическое ожидание СП в сечении http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image705.gif определяется выражением

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image712.gif,                          (5.40)

а дисперсия – выражением

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image713.gif.      (5.41)

Однако, законов распределения и числовых характеристик только в сечении http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image705.gif недостаточно для описания случайного процесса, который развивается во времени. Поэтому, необходимо рассмотреть второе сечении http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image714.gif (рис. 5.3). В этом случае СП будет описываться уже двумя случайными величинами http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image707.gif и http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image715.gif, разнесенными между собой на интервал времени http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image716.gif и характеризоваться двумерной функцией распределения http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image717.gif и двумерной плотностью http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image718.gif, где http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image719.gif, http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image720.gif. Очевидно, если ввести в рассмотрение третье, четвертое и т.д. сечения, можно прийти к многомерной (N-мерной) функции распределения http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image721.gif и соответственно к многомерной плотности распределения http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image722.gif.

Важнейшей характеристикой случайного процесса служит автокорреляционная функция (АКФ)

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image723.gif,   (5.43)

устанавливающая степень статистической связи между значениями СП в моменты времени http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image705.gif и http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image724.gif

Представление СП в виде ансамбля реализаций приводит к понятию стационарности процесса. Случайный процесс является стационарным, если все начальные и центральные моменты не зависят от времени, т.е.

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image725.gif, http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image726.gif.

Это жесткие условия, поэтому при их выполнении СП считается стационаром в узком смысле.

На практике используется понятие стационарности в широком смысле. Случайный процесс стационарен в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, т.е.:

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image727.gif; http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image728.gif,          (5.44)

а автокорреляционная функция определяется только интервалом http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image716.gif и не зависит от выбора http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image705.gif на оси времени

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image729.gif.                      (5.45)

В дальнейшем будут рассматриваться только стационарные в широком смысле случайные процессы.

Выше отмечалось, что случайный процесс помимо представления ансамблем реализаций, может быть представлен единственной реализацией на интервале времени T. Очевидно, все характеристики процесса могут быть получены усреднением значений процесса по времени.

Математическое ожидание СП при усреднении по времени определяется следующим образом:

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image730.gif.                           (5.46)

Отсюда следует физический смысл http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image679.gif: математическое ожидание – это среднее значение (постоянная составляющая) процесса.

Дисперсия СП определяется выражением

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image731.gif.                       (5.47)

и имеет физический смысл средней мощности переменной составляющей процесса.

Автокорреляционная функция при усреднении по времени

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image732.gif.  (5.48)

Случайный процесс называется эргодическим, если его вероятностные характеристики, полученные усреднением по ансамблю, совпадают с вероятностными характеристиками, полученными усреднением по времени единственной реализации из этого ансамбля. Эргодические процессы являются стационарными.

Использование выражений (5.46), (5.47) и (5.48) требует, строго говоря, реализации случайного процесса большой (теоретически бесконечной) протяженности. При решении практических задач интервал времени http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image733.gif ограничен. При этом большинство процессов считают приблизительно эргодическими и вероятностные характеристики определяют в соответствии с выражениями

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image734.gif;                               (5.49)

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image735.gif;

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image736.gif.

Случайные процессы, у которых исключено математическое ожидание, называются центрированными. В дальнейшем под http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image703.gif и http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image737.gif будут подразумеваться значения центрированных случайных процессов. Тогда выражения для дисперсии и автокорреляционной функции принимают вид

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image738.gif;                               (5.50)

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image739.gif.                        (5.51)

Отметим свойства АКФ эргодических случайных процессов:

– автокорреляционная функция является вещественной функцией аргумента http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image740.gif,

– автокорреляционная функция является четной функцией, т.е. http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image741.gif,

– при увеличении http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image740.gif АКФ убывает (необязательно монотонно) и при http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image742.gif стремится к нулю,

– значение АКФ при http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image743.gif равно дисперсии (средней мощности) процесса

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image744.gif.

На практике часто приходится иметь дело с двумя и более СП. Так например, на вход радиоприемника одновременно поступает смесь случайного сигнала и помехи. Взаимную связь между двумя случайными процессами устанавливает взаимная корреляционная функция (ВКФ). Если http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image702.gif и http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image745.gif – два случайных процесса, характеризующиеся реализациями http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image703.gif и http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image737.gif, то взаимная корреляционная функция определяется выражением

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image746.gif.                       (5.52)

Взаимная корреляционная функция характеризует степень статистической связи между значениями случайных процессов в моменты времени http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image747.gif и http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image748.gif.

Часто используют коэффициент взаимной корреляции

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image749.gif,                                         (5.53)

причем http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image750.gif.

Два случайных процесса http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image702.gif и http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image745.gif называются некоррелированными если http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image751.gif.

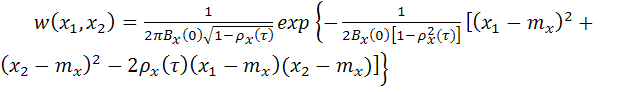
Среди многообразия случайных процессов наиболее широко распространенным является нормальный случайный процесс. Нормальный случайный процесс http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image702.gif в любом сечении его реализации http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image703.gif характеризуется плотностью вероятности

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image678.gif.                              (5.54)

Для нормального случайного процесса все числовые характеристики, кроме математического ожидания и дисперсии, равны нулю. Поскольку дисперсия представляет собой значение АКФ при http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image743.gif, то нормальный случайный процесс полностью определяется математическим ожиданием http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image679.gif и автокорреляционной функцией http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image752.gif. Поэтому (5.54) можно представить следующим образом

http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image753.gif.                           (5.55)

Двумерная плотность распределения вероятностей значений http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image754.gif и http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image755.gif нормального случайного процесса, разделенных интервалом времени http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image740.gif, имеет вид

,             (5.56)

где http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image757.gif – нормированная автокорреляционная функция процесса.

Следует отметить, что для нормального случайного процесса некоррелированность двух значений, разделенных интервалом времени http://nauchebe.net/img/RTCS_2_image740.gif, означает и их статистическую независимость.